Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Mejor aproximación en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jonathan Ricardo OTRERA CRUZ

ASESOR

Dra. Roxana LÓPEZ CRUZ

Lima, Perú

2020

Referencia bibliográfica

Otrera, J. (2020). *Mejor aproximación en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K*. Tesis para optar el título de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código ORCID del autor : 0000-0001-7250-9111

Código ORCID del asesor: 0000-0002-7703-5784

DNI del autor : 42130220

Grupo de Investigación : Ninguno.

Institución que financia parcial o totalmente la investigación: Autofinanciado.

Ubicación geográfica donde desarrollo la investigación:

Mz. A lote 31 Urb. Cerro de Oro-Chilca-Cañete-Lima.

Año o rango de años que la investigación abarcó:

1 año

Inicio: Abril 2019

Fin : Abril 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 15:00 horas del Viernes 24 de julio del 2020, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia (PRESIDENTE), Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (MIEMBRO) Y LA Dra. Roxana López Cruz (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «MEJOR APROXIMACIÓN EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE UN COMPACTO K», presentado por el señor Bachiller Jonathan Ricardo Otrera Cruz, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

.Diecisiete (17) (Sobresaliente).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia, manifestó que el señor Bachiller JONATHAN RICARDO OTRERA CRUZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 15:55 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. EDGAR DIÓGENES VERA SARAVIA
PRESIDENTE

DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA
MIEMBRO

DRA. ROXANA LÓPEZ CRUZ
MIEMBRO ASESOR

MEJOR APROXIMACIÓN EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE UN COMPACTO K

Jonathan Ricardo Otrera Cruz

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

....
Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia
Presidente

....
Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Miembro

....
Dra. Roxana López Cruz
Miembro Asesor

Lima - Perú
Julio - 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

OTRERA CRUZ, JONATHAN RICARDO

Mejor aproximación en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K, (Lima) 2020.

viii, 37 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática , 2020).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática . UNMSM/FdeCM II. Título (Serie).

Este trabajo esta dedicado a mi mamá Yolanda y a mi papá Esteban pues su apoyo siempre ha sido de gran ayuda

Agradecimientos

Agradezco al apoyo de mis padres Yolanda Cruz Montoya y Esteban Valencia Martinez, la ayuda del Mg. Tomás Núñez Lay, asi como, la ayuda de muchos de mis amigos.

RESUMEN

MEJOR APROXIMACIÓN EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE UN COMPACTO K

JONATHAN RICARDO OTRERA CRUZ

JULIO - 2020

Asesora:	Dra. Roxana López Cruz
Título obtenido:	Licenciado en Matemática

. . . .

Este trabajo trata de la caracterización de los elementos de mejor aproximación en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K, asi como el estudio de su unicicidad utilizando para ello el concepto de función concentrada y sistemas T. Las funciones concentradas permiten facilitar este estudio pues crean una representación de las funcionales lineales que hacen mas fácil su tratamiento por medio un sistema de ecuaciones.

Los sistemas T sirven para tomar en cuenta un subespacio de un conjunto de funciones fuera del cual se da la unicidad, esto es de gran ayuda para nuestro objetivo.

PALABRAS CLAVES: Funcionales
Sistemas de ecuaciones
Función concentrada
Sistemas T

ABSTRACT

BEST APPROXIMATION IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON A COMPACT K

JONATHAN RICARDO OTRERA CRUZ

JULY - 2020

Advisor: Dra. Roxana López Cruz
Obtained Title: Degree in mathematics

. . . .

This work deals with the characterization of the elements of best approximation in the space of continuous functions on a compact K, as well as the study of its uniqueness using the concept of concentrated function and T systems .
The concentrated functions allow to facilitate this study because they create a representation of the linear functionals wich make their treatment easier by means of a system of equations.
The T systems serve to take into account a subspace of a set of functions outside of which the uniqueness is given, this is of great help for our objective.

KEYWORDS: Functional
System of equations
T Systems
Concentrated function

Índice general

Introducción

La teoría de los espacios métricos nos dice que la distancia de un subespacio de dimensión finita a un punto exterior de el se puede alcanzar en un punto el cual es llamado elemento de mejor aproximación. Yo me preguntaba ¿sera posible caracterizar dicho punto? ¿se da la unicidad de este punto?.
En mi estudio de pregrado supe de la teoría de aproximación, que trata justo de estudiar aproximaciones de funciones continuas por medio de polinomios. Estos polinomios según Chevichev tienen una forma especial, existen unas generalizaciones de los resultados de Chevichev que estan desarrolladas en este trabajos las cuales se ven muy interesantes.

En el trabajo me causo gran curiosidad el saber que existian una clase especial de espacios normados llamados espacios estrictamente convexos en donde se daba la unicidad de los elementos de mejor aproximación, pude observar que algunos espacios conocidos eran estrictamente convexos mas no el espacio que importa en este trabajo, es por eso que me pareció importante definir crtiterios en el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K .

Muchas de las demostraciones dependen de la noción de función concentrada, que dan una representación de una funcional lineal en un conjunto finito de puntos, esto me parecio interesante ya que esto causaba el mejor manejo de estas funcionales lineales y un mejor estudio de ellas.

Dado el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo compacto $[a, b]$, $C[a, b]$ y el subespacio $L_n = \{P_n : [a, b] \to \mathbb{R}/P_n$ es un polinomio de grado $\leq n\}$
y supongamos que deseamos analizar $E_n(x) = d(x, L_n)...(1)$. Naturalmente por el teorema de Weirstrass, Chevichev probó que el infimo de (1) es alcanzable, es decir, para cada n existe un polinomio Q_n tal que $E_n(x) = \|x - Q_n\|$, además tal polinomio Q_n es único y esta caracterizado por la propiedad siguiente: Existen $n + 2$ puntos $t_i \in [a, b]$ tales que $|x(t_i) - Q_n(t_i)| = \|x - Q_n\|$ en todos los t_i, mientras que el signo de $x(t_i) - Q_n(t_i)$ varía alternadamente en estos t_i. Estos resultados de Chevichev fueron objeto de diversas generalizaciones que seran expuestas en este trabajo.

El problema que se resuelve en este trabajo es la caracterización y la unicidad de los elementos de mejor aproximación.

En el capítulo 1 se plantea el problema es espacios normales generales asimismo se enuncia y se demuestra un teorema donde se da criterios para solucionar el problema en espacios normados generales. Este capítulo es importante pues estos criterios seran usados mas adelante.

En el capítulo 2 se define una clase de espacios donde se da la unicidad de los elementos de mejor aproximación a saber los espacios estrictamente convexos. Este capítulo puede leerse independientemente pues los espacios estrictamente convexos solo se tratan en este capítulo.

En el capítulo 3 se desarrolla el caso especial en que $E = C(K)$ donde K es un compacto de $\mathbb{R}^N$, ahi se dan proposiciones que permitaran caracterizar y determinar la unicidad de los elementos de mejor aproximación.

El capítulo 4 trata sobre los sistemas T, que son conjuntos donde se da la unicidad de los elementos de mejor aproximación en el espacio $E = C(K)$. Aqui obtendremos las generalizaciones de los resultados de Chevichev asi como una aplicación al caso en que $K = [a, b]$.

Capítulo 1

Mejor aproximación en espacios generales

Por el teorema de Weirstrass(ver [1] página 262) sabemos que toda función en $C\,[a,b]$ se puede aproximar mediante un limite uniforme de polinomios.

Se define

$$L_n = \{P_n : [a,b] \to \mathbb{R}/P_n \text{ es un polinomio de grado} \leq n\}$$

Para $x \in C[a,b]$ consideremos

$$E_n(x) = d(x, L_n) \tag{1.1}$$

Luego por el teorema de Weirstrass $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(x) = 0$ .Antes del descubrimiento de Weirstrass, Chevichev probó que el ínfimo de (1.1) es alcanzable; esto es, para cada n existe un polinomio Q_n(llamado mejor aproximación de x, para el grado de n) tal que $E_n(x) = \|x - Q_n\|$. Además, tal polinomio Q_n es único y tendrá por caracterización la propiedad siguiente: Existen $n+2$ puntos $t_i \in [a,b]$ tales que $|x(t_i) - Q_n(t_i)| = \|x - Q_n\|_\infty$ en todos los t_i, mientras que el signo de $x(t_i) - Q_n(t_i)$ varia alternadamente en estos t_i.

Estos resultados de Chevichev fueron objeto de diversas generalizaciones, que seran expuestas en este trabajo. Observemos que estos resultados son la base sobre la cual se edifica la teoría de la aproximación que estudia las relaciones entre las propiedades de la función x y el comportamiento de $E_n(x)$ cuando $n \to \infty$.

Si tomamos $E = C[a,b]$ con la norma usual y consideramos $y_0 = 1, y_1(t) = t, \ldots, y_n(t) = t^n$ vemos que $L_n = \langle y_0, y_1, \ldots, y_n \rangle$. Por lo tanto, el problema de Chevichev es un caso particular de la cuestión general siguente:

Sean E un espacio normado, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, elementos linealmente independientes fijos, $L = \langle y_1, y_2, y_3, ..., y_n \rangle$ y $x_0 \notin \overline{L}$, es decir $d(x_0, L) = d > 0$. Sabemos que en L existe $y_0 \in L$ tal que $\|x_0 - y_0\| = d$

Definición 1.0.1 *Llamaremos al elemento y_0 un elemento de mejor aproximación para x_0*

Para abreviar escribiremos en adelante y_0 es un e.m.ap. para indicar que y_0 es un elemento de mejor aproximación de x_0

Se desea dar solución a las dos cuestiones siguentes:

1. Dar caracterizaciones de los e.m.ap.

2. Determinar si el e.m.ap es único

Para hacer esto, primero daremos algunas definiciones

Definición 1.0.2

$$L_0 = L + \langle x_0 \rangle$$
$$L^{\perp} = \{g \in E^*/g(L) = 0\}$$
$$L_1^{\perp} = \left\{f \in L^{\perp}/f(x_0) = 1\right\}$$
$$z_0 = x_0 - y_0$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(L, x_0) = \left\{f_0 \in L_1^{\perp}/ \|f_0\| = \|f_0\|_{L_0}\right\}$$

Lema 1.0.1 *$L_1(x_0) = L_1(z_0)$ y $\mathcal{F}(L, x_0) = \mathcal{F}(L, z_0)$*

Demostración:
Basta con observar que $f(z_0) = f(x_0)$ y $L_0(z_0) = L_0(x_0)$

Definición 1.0.3 *Un elemento $f_0 \in L_1^{\perp}$ es de minima norma si $\|f_0\| = \text{mín}\left\{\|f\| / f \in L_1^{\perp}\right\}$*

Observación 1.0.1

$$d = \sup_{g \in L^{\perp} \ \|g\| \leq 1} |g(x_o)| = \sup_{g \in L^{\perp} \ \|g\| = 1} |g(x_o)|$$

Además existe $g_0 \in L^{\perp}$ tal que $\|g_0\| = 1$ y $|g_0(x_0)| = d$. Este g_0 se caracteriza por la igualdad $1 = \|g_0\| = \|g_0\|_{L_0}$

Definición 1.0.4 *Un elemento z de E es extremal de $f \in E^*$ si $|f(z)| = \|f\| \|z\|$*

Lema 1.0.2 *Dados $c, c_1 \in \mathbb{K}$, z es extremal de f entonces cz es extremal de $c_1 f$*

Demostración:
$|c_1 f(cz)| = |c| |c_1 f(z)| = |c| |c_1| |f(z)| = |c| |c_1| \|f\| \|z\| = \|c_1 f\| \|cz\|$

Definición 1.0.5 *$z \perp L$ si y solo si $d(z, L) = \|z\|$*

Lema 1.0.3 *$z \perp L$ si y solo si $\|z\| \leq d(z, L)$*

Demostración:
Como $0 \in L$ se tiene $d(z, L) \leq \|z - 0\| = \|z\|$

Observación 1.0.2

a) Si f y g son dos funcionales lineales, entonces se verifica $Kerf = Kerg$ si y solo si existe $c \neq 0$ tal que $g = cf$

b) Si f y g son dos funcionales lineales y $a \neq 0$. Entonces $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$ si y solo si $f = g$

c) Si $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funcionales lineales tales que $Kerf_1 \cap Kerf_2 \cap \ldots \cap Kerf_n \subseteq Kerf$, entonces existen $c_1, c_2, \ldots$ en $\mathcal{K}$ tales que $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$

Lema 1.0.4

$$L_1^{\perp} = \left\{ f \in L^{\perp} / \text{ existe } \ g \in L^{\perp} \text{ con } \|g\| = 1 \text{ y } f = \frac{1}{g(x_0)} g \right\}$$

Demostración: Veamos las primera inclusión:
Sea $f \in L_1^{\perp}$ entonces $f = \frac{1}{g(x_0)} g$ siendo $g = \frac{f}{\|f\|}$
Ahora la segunda inclusión:
Sea $f = \frac{1}{g(x_o)} g$ donde $g \in L^{\perp}$ con $\|g\| = 1$ entonces $f(x_0) = 1$ de ahi $f \in L_1^{\perp}$

■

Lema 1.0.5

$$\frac{1}{d} = min \left\{ \|f\| / f \in L_1^{\perp} \right\}$$

Demostración: Veamos que $\frac{1}{d}$ es una cota inferior:
Sea $f \in L_1^{\perp}$ entonces $f = \frac{1}{g(x_0)} g$ donde $g \in L^{\perp}$ con $\|g\| = 1$ luego

$$\|f\| = \frac{1}{|g(x_0)|} \|g\| = \frac{1}{|g(x_0)|}$$

Como $|g(x_0)| \leq d$ (por la obervación 1.0.1) tenemos que

$$\frac{1}{|g(x_0)|} \geq \frac{1}{d} \text{ entonces } \|f\| \geq \frac{1}{d}$$

Luego $\frac{1}{d}$ es una cota inferior del conjunto $\left\{\|f\| / f \in L_1^{\perp}\right\}$
Veamos que el mínimo se alcanza.
Por la observación 1.0.1 existe $g_0 \in L^{\perp}$ tal que $\|g_0\| = 1$ y $|g_0(x_0)| = d$
Sea $f_0 = \frac{1}{g_0(x_0)} g_0$ entonces $\|f_0\| = \frac{1}{d}$

Lema 1.0.6 *$f \in L_1^{\perp}$ es de mínima norma si y solo si $f \in \mathcal{F}$*

Demostración: Sea $f \in L_1^{\perp}$ de mínima norma.
Como $f \in L_1^{\perp}$por la afirmación 1.0.4 f se puede escribir como $f = \frac{1}{g(x_0)} g$ donde $g \in L^{\perp}$ con $\|g\| = 1$ de aqui

$$\frac{1}{d} = \|f\| = \frac{1}{|g(x_0)|} \|g\|$$

luego $|g(x_0)| = d$ entonces por la observación 1.0.1 tenemos $1 = \|g\| = \|g\|_{L_0}$ por tanto

$$\|f\| = \frac{1}{|g(x_0)|} \|g\| = \frac{1}{|g(x_0)|} \|g\|_{L_0} = \|f\|_{L_0}$$

esto es $f \in \mathcal{F}$
Recíprocamente sea $f \in \mathcal{F}$, como $f \in L_1^{\perp}$ sabemos que f se puede escribir como $f = \frac{1}{g(x_0)} g$ donde $g \in L^{\perp}$ con $\|g\| = 1$ luego tomando norma y utilizando el hecho que $f \in \mathcal{F}$ llegamos a que $\|g\| = \|g\|_{L_0}$ por tanto de la observación 1.0.1 tenemos que $|g(x_0)| = d$ de aqui por la forma que tiene f llegamos a que f es de mínima norma.

■

Lema 1.0.7 *$y_0 \in L$ es e.m.ap. de x_0 sí y solo si $z_0 \perp L$*

Demostración: Observemos que $d(x - y', L) = d(x, L)$ para todo $y' \in L$ pues
$d(x - y', L) = inf\left\{\|x - y' - y\| / y \in L\right\} = inf\left\{\|x - y\| / y \in L\right\} = d(x, L)$
En particular $d(z_0, L) = d(x_0 - y_0, L) = d(x_0, L) = \|x_0 - y_0\| = \|z_0\|$

■

Lema 1.0.8 *Se cumplen:*

a) Para que $z_0 \perp L$ es necesario que z_0 sea extremal de toda funcional $f_0 \in \mathcal{F}(L, z_0)$

b) Si z_0 es extremal de una $f \in L_1^{\perp}(z_0)$ entonces $z_0 \perp L$ y $f \in \mathcal{F}(L, z_0)$

Demostración: $a)$

Sea $z_0 \perp L$ entonces $\|z_0\| = d(z_0, L)$
Sea $f_0 \in \mathcal{F}(L, z_0)$ .Por la afirmación 1.0.6 tenemos

$$\|f_0\| = \frac{1}{d(z_0, L)} = \frac{1}{\|z_0\|}$$

Luego

$$|f_0(z_0)| = 1 = \frac{1}{\|z_0\|} \cdot \|z_0\|$$

por tanto $|f_0(z_0)| = \|f_0\| \, \|z_0\|$, esto es, z_0 es extremal de $f_0 \in \mathcal{F}(L, z_0)$

$b)$

Sea z_0 extremal de una $f \in L_1^{\perp}(z_0)$ entonces

$$|f(z_0)| = \|f\| \, \|z_0\| \tag{1.2}$$

luego $1 = \|f\| \, \|z_0\|$
tomemos $f_1(x) = \frac{1}{\|f\|} f(x)$ tenemos $f_1 \in L^{\perp}(z_0)$ y $\|f_1\| = 1$ Observemos que por (1.2)

$|f_1(z_0)| = \|z_0\|$ (1.3)

Por la observación 1.0.1 tenemos

$$|f_1(z_0)| \leq d(z_0, L)$$

entonces $\|z_0\| \leq d(z_0, L)$(por lo observado en (1.3))
y por la observación 1.0.3 tenemos que $z_0 \perp L$
Veamos que $f \in \mathcal{F}(L, z_0)$

$$\|f\| = \frac{1}{\|z_0\|} = \frac{1}{d(z_0, L)}$$

entonces f es de minima norma. Por tanto $f \in \mathcal{F}(L, z_0)$

■

Lema 1.0.9 *Para que el elemento de mejor aproximación sea único es necesario y suficiente que algún f_0 de $\mathcal{F}$ no tenga dos elementos extremales l.i. en el subespacio L_0*

Demostración: Supongamos primero que el e.m.ap es único
Sean z_1 y z_2 dos elementos extremales de una $f_0 \in \mathcal{F}$ en el espacio L_0
Probaremos que z_1 y z_2 no son l.i.
Podemos suponer que $z_i \neq 0$ para cada i
Si algún $z_i \in L$ entonces $f_0(z_i) = 0$, de aqui $0 = \|f_0(z_i)\| = \|f_0\| \, \|z_i\|$ por tanto $\|f_0\| = 0$, esto es $f_0 = 0$ lo cual es absurdo. Se sigue que $z_i \notin L$;
z_1 y z_2 se pueden escribir como

$$z_1 = \lambda_1 x_0 + \omega_0 \text{ y } z_2 = \lambda_2 x_0 + \omega_1$$

donde $\lambda_i \neq 0$ para todo i y $\omega_i \in L$ para todo i
Tenemos

$$\frac{1}{\lambda_i} z_i = x_0 - -\frac{1}{\lambda_i}\omega_j \text{ para todos los } i \text{ y los } j$$

de aqui por la observación 1.0.1

$$f_0 \in \mathcal{F}(L, x_0) = \mathcal{F}(L, -\frac{1}{\lambda_i}\omega_0) \text{ para todo } i$$

luego utilizando $b)$ de la prueba de $c)$ y $d)$ del lema anterior obtenemos que

$$\frac{1}{\lambda_i} z_i \perp L \text{ para todo i}$$

luego los $-\frac{1}{\lambda_i}\omega_j$ son e.m.ap. de x_0, de esto y por la unicidad del e.m.ap de x_0 tenemos $\omega_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\omega_0$
ahora

$$z_2 = \lambda_2 x_0 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\omega_0 = \lambda_2(x_0 + \frac{1}{\lambda_1}\omega_0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1$$

por lo tanto z_1 y z_2 no son l.i.

Recíprocamente supongamos que un f_0 de $\mathcal{F}$ no tiene dos elementos extremales l.i. en el subespacio L_0 y veamos la unicidad del e.m.ap.
Sean y_0 y y_1 dos elementos de mejor aproximación. Probaremos que $y_0 = y_1$.
Los elementos

$$z_0 = x_0 - y_0 \text{ y } z_1 = x_0 - y_1$$

pertenecen a L_0 y además son dos elementos extremales de f_0(por $c)$) por tanto existe $\lambda \in K$ tal que $z_0 = \lambda z_1$ es decir $x_0 - y_0 = \lambda(x_0 - \lambda_1)$
con esto $x_0 - y_0 = \lambda x_0 - \lambda y_1$ de donde $\lambda = 1$ con lo cual $y_0 = y_1$

■

Todos los lemas anteriores se resumen en el siguente teorema:

Teorema 1.0.1 *Se cumplen:*

a) *En* $L_1^{\perp} = L_1^{\perp}(x_0)$ *existe* $f_0 \in \mathcal{F}$ *de mínima norma.*

b) *Cada tal* $f_0 \in \mathcal{F}$ *determina* $E_n(x_0) = d(x_0, L)$ *por la fórmula* $\frac{1}{d} = \|f_0\|$

c) *Para que* $y_0 \in L$ *sea elemento de mejor aproximación de* x_0 *es necesario y suficiente que* z_0 *sea extremal de toda* $f_0 \in \mathcal{F}$

d) *Si* $z_0 \in L$ *es extremal de* $f \in L_1^{\perp}$ *entonces* y_0 *es e.m.ap. y* $f \in \mathcal{F}$

e) *Para que el elemento de mejor aproximación sea único es necesario y suficiente que algún* f_0 *de* $\mathcal{F}$ *no tenga dos elementos extremales l.i. en el subespacio* L_0

Debido a la importancia de las nociones "$z \perp L$" y "z extremal de f" tendremos en cuenta la proposición siguiente:

Proposición 1.0.1 *z es extremal de f si y solo si $z \perp Kerf$. Además para todo z y para todo f no nulo se tiene $|f(z)| = \|f\| \, d(z, Kerf)$,es decir, $d(z, Kerf) = \frac{|f(z)|}{\|f\|}$*

Demostración: Llamemos $N = Kerf$.
Si $g \in N^{\perp}$ entonces $N \subseteq Kerg$ luego por la observación 1.0.2 $g = cf$ para algún $c \in \mathcal{K}$, esto prueba que $N^{\perp} \subseteq < f >$ con lo cual $0 < dimN^{\perp} \leq 1$(esto es porque si $dimN^{\perp}$=0 entonces $Kerf = E$ luego f es nula lo cual es absurdo) esto implica que $dimN^{\perp} = 1$, por tanto $N^{\perp} =< f >$
Se cumple que $g \in N_1^{\perp}$ si y solo si $g = \frac{f}{f(z)}$.En efecto:
Si $g \in N_1^{\perp}$ entonces $g \in N^{\perp}$ y $g(z) = 1$ por tanto $g = cf$ para algún $c \in \mathcal{K}$ entonces $1 = g(z) = cf(z)$ luego $c = \frac{1}{f(z)}$ de aqui $g = \frac{1}{f(z)}f$
Recíprocamente si $g = \frac{1}{f(z)}f$ tenemos $g(z) = 1$ y $g(N) = 0$, es decir:
$g \in N_1^{\perp}$

Capítulo 2

Espacios estrictamentes convexos

El objetivo en esta sección es definir una clase particular de espacios donde el e.m.ap es único.

Definición 2.0.6 *Un espacio normado E se dice que es estrictamente convexo si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, con $x, y \in E$, implica $y = cx$ para algún $c \geq 0$*

Ejemplos:

a) El espacio $C[0,1]$ no es estrictamente convexo, en efecto:

Consideremos

$$\begin{array}{rccc} x: & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & -t+1 \end{array}$$

y además

$$y(t) = \left\{ \begin{array}{cl} -2t+1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{array} \right.$$

estas funciones son de norma 1 y además $x(0) = y(0) = 1$ con lo cual se cumple que $\|x+y\| = 2 = \|x\| + \|y\|$, sin embargo no se cumple que $y = cx$ para $c \geq 0$

b) Se puede probar que los espacios L^p y l^p son estrictamente convexos para todo $1 < p < \infty$, en cambio es fácil ver que esto no es cierto para $p = 1$ ni para $p = \infty$

Proposición 2.0.2 *Para todo espacio normado E son equivalentes:*

a) E no es estrictamente convexo

b) Existen $x, y \in E$ tales que $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x+y\| = 2$

c) La esfera unitaria $S = \{x / \|x\| = 1\}$ contiene un segmento $[x, y]$ siendo $x \neq y$

d) Existe f no nulo en E^* con dos elementos extremales z_1, z_2 linealmente independientes

Demostración:

$a) \to b)$

Existen x, y linealmente independientes con $\|x\| = a$, $\|y\| = b$ y $\|x+y\| = a+b$.
Consideremos $x' = \frac{1}{a}x$ y $y' = \frac{1}{b}y$ vemos que $\|x'\| = 1$ y $\|y'\| = 1$.Veamos que $\|x' + y'\| = 2$.
Es obvio que $\|x'+y'\| \leq 2$. Supongamos que $\|x'+y'\| < 2$ luego $\|bx + ay\| < 2ab$ (pues $x' = \frac{bx}{ab}$ y $y' = \frac{ay}{ab}$)
Ahora

$$\|ax + by\| \leq |a| \|x\| + |b| \|y\| = a^2 + b^2$$

Luego

$$(a+b)\|x+y\| = \|bx + ay + ax + by\| \leq \|bx + ay\| + \|ax + by\| < 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2$$

por lo tanto $\|x+y\| < a+b$ lo cual es absurdo.

$b) \to c)$

Sean $x \neq y$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x+y\| = 2$.
Veamos que $[x, y] \subseteq S$. En efecto:
Se observa que $\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq 1$
Supongamos que $\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$
Ahora $\|x+y\| = \|\lambda x + (1-\lambda)y + (1-\lambda)x + \lambda y\| \leq \|\lambda x + (1-\lambda)y\| + \|(1-\lambda)x + \lambda y\| < \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| + 1$ luego $\|x+y\| < 2$ lo cual es absurdo.

$c) \to a)$

Como $[x, y] \subseteq S$ para $x \neq y$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$ luego $\|x+y\| = 2$.
No puede ser $y = cx$ para $c \geq 0$ pues en este caso $1 = \|y\| = c\|x\| = c$ y entonces $x = y$ lo cual es absurdo.

$a) \to d)$

Existen x, y linealmente independientes con $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

por el teorema de Hahn-Banach existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x+y) = \|x+y\|$. Tenemos

$$|f(x+y)| = \|f\| \, \|x+y\| = \|f\| \, \|x\| + \|f\| \, \|y\|$$

Por otro lado se sabe que $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$ y $|f(y)| \leq \|f\| \, \|y\|$ y si algunas de esas desigualdades fuera estricta tendriamos

$$|f(x+y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \|f\| \, \|x\| + \|f\| \, \|y\| = |f(x+y)| \text{ lo cual es absurdo}$$

Por lo tanto $|f(x)| = \|f\| \, \|x\|$ y $|f(y)| = \|f\| \, \|y\|$ es decir x, y son elementos extremales linealmente independientes

$d) \to a)$

Existe $f \in E^*$ no nulo tal que $|f(x)| = \|f\| \, \|x\|$ y $|f(y)| = \|f\| \, \|y\|$ donde x, y son l.i.
Tenemos

$$\|f\| \, (\|x\| + \|y\|) = |f(x)| + |f(y)| \tag{2.1}$$

Por otro lado $f(x)$ y $f(y)$ se pueden escribir como $f(x) = |f(x)| \, e^{ia}$ y $f(y) = |f(y)| \, e^{ib}$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $f(e^{-ia}x) = |f(x)|$ y $f(e^{-ib}y) = |f(y)|$
De esto ultimo y (2.1) se tiene:

$$f(e^{-ia}x) + f(e^{-ib}y) = \|f\| \, (\|x\| + \|y\|) = \|f\| \, (\|e^{-ia}x\| + \|e^{-ib}y\|)$$

luego si llamamos $x' = e^{-ia}x$ y $y' = e^{-ib}y$ tenemos

$$f(x') + f(y') = \|f\| \, (\|x'\| + \|y'\|)$$

ademas sabemos que $|f(x'+y')| \leq \|f\| \, \|x'+y'\|$ con lo que $\|x'\| + \|y'\| \leq \|x'+y'\|$, es decir:

$$\|x'+y'\| = \|x'\| + \|y'\| \text{ siendo } x,y \text{ l.i.}$$

Proposición 2.0.3 *Si E es estrictamente convexo, entonces para todo subespacio L de E y todo $x_0 \notin L$ el e.m.ap. es único.*

Demostración:

Supongamos que x_0 tiene dos elementos de mejor aproximación $y_1, y_2 \in L$. Llamemos $d = d(x_0, L)$.
Como $\frac{y_1+y_2}{2} \in L$ tenemos

$$\left\| \frac{x_0 - y_1}{2} \right\| + \left\| \frac{x_0 - y_2}{2} \right\| = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \leq \left\| x_0 - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|$$

y como
$$\left\|x_0 - \frac{y_1+y_2}{2}\right\| \leq \left\|\frac{x_0-y_1}{2}\right\| + \left\|\frac{x_0-y_2}{2}\right\|$$
obtenemos que
$$\left\|x_0 - \frac{y_1+y_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x_0-y_1}{2}\right\| + \left\|\frac{x_0-y_2}{2}\right\|$$
de esto ultimo y por la hipótesis tenemos que
existe un $c \geq 0$ tal que $\frac{x_0-y_1}{2} = c\left(\frac{x_0-y_2}{2}\right)$ luego $(1-c)x_0 = y_1 + cy_2 \in L$ entonces $c = 1$ con lo cual $\frac{x_0-y_1}{2} = \left(\frac{x_0-y_2}{2}\right)$ y de ahi $y_1 = y_2$

Capítulo 3

Mejor aproximación en C(K)

En esta sección trabajaremos en el espacio $E = C(K)$ donde $K = \{t\}$ es compacto de $\mathbb{R}^N$.Sabemos que este espacio con la norma del máximo es un espacio de Banach. Veamos un teorema importante para esta sección

Teorema 3.0.2 (Teorema de representación de Riesz) *Sea $f \in E^*$ luego existe una medida signada μ tal que*

$$f(x) = \int_K x(t) d\mu \quad \textit{para todo} \quad x \in C(K) \tag{3.1}$$

Recíprocamente, toda medida signada μ define por la fórmula (3.1) una funcional lineal continua de $C(K)$

Definición 3.0.7 *$f \in C(K)^*$ esta concentrada en los puntos $t_1, t_2, ..., t_m$ de K si existen números reales $r_1, r_2, ..., r_m$ tales que $f(x) = \sum_{k=1}^{m} x(t_k) r_k$ para todo $x \in C(K)$*

Observación 3.0.3 *Si f y la medida μ estan relacionadas por el teorema de representación de Riesz entonces hablar de que μ es concentrada es lo mismo que hablar de que f es concentrada*

Antes de enunciar el siguiente teorema, enunciaremos dos lemas previos.

Lema 3.0.10 (Lema de Caratheodory) *Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea $A \subseteq E$.Entonces la cápsula convexa de A, es el conjunto de las posibles combinaciones convexas de a lo sumo $n+1$ elementos de A*

Demostración:
Basta probar que toda combinación convexa de p elementos, con $p > n+1$ se puede escribir como combinación convexas de $p-1$ elementos.Sea $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$ una

combinación convexa. Como $p-1>n$ tenemos que $x_2-x_1, x_3-x_1, ..., x_p-x_1$ son linealmente dependientes por tanto existen $b_2, ..., b_p$ no todos nulos tales que

$$b_2(x_2-x_1)+...+b_p(x_p-x_1)=0$$

lo cual poniendo $a_1=-(b_2+...+b_p)$ y $a_i=b_i$ para $2\leq i\leq p$ tenemos que $a_1x_1+...+a_px_p=0$ con $\sum_{i=1}^p a_i=0$. Según esta definición existe $a_j\neq 0$, cambiando de signo de ser necesario podemos suponer que $a_j>0$, luego existe $a_j>0$. Sea j_0 tal que $a_{j_0}/\lambda_{j_0}\geq a_j/\lambda_j$ para todo $a_j>0$, luego tenemos $a_{j_0}/\lambda_{j_0}\geq a_i/\lambda_i$ para todo $i\leq p$...$(*)$. Debido a que $\sum_{i=1}^p a_i=0$ tenemos $a_j=-\sum_{i\neq j_0} a_i$...$(**)$. Además tenemos $x_{j_0}=-\sum_{i\neq j_0} a_i/a_{j_0}x_i$. Entonces tenemos $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i=\sum_{i\neq j_0}\lambda_i x_i+\lambda_{j_0}x_{j_0}=\sum_{i\neq j_0}\lambda_i x_i-\lambda_{j_0}\sum_{i\neq j_0} a_i/a_{j_0}x_i=\sum_{i\neq j_0}(\lambda_i-\lambda_{j_0}a_i/a_{j_0})x_i$ y esta expresión resulta ser una combinación convexa de $p-1$ elementos debido a $(*)$ y $(**)$.

Lema 3.0.11 (Lema de Caratheodory para compactos de $\mathbb{R}^n$) *Sean K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, K_1 su cápsula convexa y $\bar{K}_1$ su cerradura. Entonces todo punto de $\bar{K}_1$ se escribe como la combinación convexa de a lo sumo $n+1$ puntos de K*

Demostración:
Por el lema de Caratheodory el lema ya se cumple para puntos de K_1.Veamos que es cierto para puntos de $\bar{K}_1$. Sea $x\in\bar{K}_1$, luego existe una sucesión $(y_m)\subseteq K_1$ tal que $y_m\to x$.Cada y_m se puede escribir de la forma $y_m=\lambda_1^m x_1^m+...+\lambda_{n+1}^m x_{n+1}^m$.Debido a que $(x_1^m,...,x_{n+1}^m)\subseteq K^{n+1}$ y siendo K^{n+1} compacto, podemos extraer una subsucesión $(x_1^{m_k},...,x_{n+1}^{m_k})$ tal que $(x_1^{m_k},...,x_{n+1}^{m_k})\to(x_1,...,x_{n+1})$ donde $(x_1,...,x_{n+1})\in K^n$. Además por la acotación uniforme de las sucesiones $(\lambda_i^m)_{m\in\mathbb{N}}(0\leq\lambda_i^m\leq 1$ para todo i y para todo $m)$ podemos suponer extrayendo sucesiones si es necesario que $\lambda_i^{m_k}\to\lambda_1,...,\lambda_{n+1}^{m_k}\to\lambda_{n+1}$ para algunos $\lambda_1,...\lambda_{n+1}$ en $\mathbb{R}$. Por tanto tomando límite tenemos $x=\lim y^{m_k}=\lim\lambda_1^{m_k}x_1^{m_k}+...+\lambda_{n+1}^{m_k}x_{n+1}^{m_k}=\lambda_1x_1+...+\lambda_{n+1}x_{n+1}$ con $\sum\lambda_i=1$ y $x_i\in K$ para todo i.

Teorema 3.0.3 (Teorema de Caratheodory-Riesz) *Si $c_1, c_2, ..., c_{n+1}$ son $n+1$ números reales fijos, $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}=x_0$; $n+1$ funciones en $C(K)$ y si σ es una medida real tal que $\int_K y_i(t)d\sigma=c_i$ para $1\leq i\leq n+1$.*
Entonces:

a) Existe una medida σ_1 concentrada en $r\leq n+2$ puntos que cumple $\|\sigma_1\|=\|\sigma\|$ y $\int_K y_i(t)d\sigma_1=c_i$ para $1\leq i\leq n+1$

b) Existen r puntos $t_1, t_2, ..., t_r\in K$ y r números reales $m_1, m_2, ..., m_r$ tales que $\sum_{k=1}^r y_i(t_k)m_k=c_i$ para $1\leq i\leq n+1$, además

$$\sum|m_k|=\|\sigma\|$$

Demostración:
Supongamos primero que σ es una medida no negativa tal que $\sigma(K) = 1$.Podemos subdividir K como unión disjunta de compactos $K = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_p$, llamemos $\lambda_j = \sigma(K_j)$, entonces tenemos las $n+1$ sumas de Riemann:

$$s_i = \sum_{j=1}^{p} y_i(t_j)\lambda_j, \;\; t_j \in K_j \;\;\text{i=1,...,n+1}$$

las cuales tienden a las $n+1$ integrales $\int y_i(t)d\sigma = c_i$; es decir $(s_1, s_2, ..., s_{n+1})$ converge a $(c_1, c_2, ..., c_{n+1})$. Debido a que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \sum \sigma(K_j) = \sigma(K) = 1$ siendo $\lambda_j \geq 0$ cada $(s_1, s_2, ..., s_{n+1})$ es una combinación convexa de las p $(n+1)-$uplas $(y_1(t_j), ..., y_{n+1}(t_j))$ para $j = 1, 2, ..., p$. Sean

$$\Gamma = \{(y_1(t), ..., y_{n+1}(t))/t \in K\}$$

y Γ_1 la cápsula convexa de Γ las consideraciones anteriores dicen que $(s_1, ..., s_n) \in \Gamma_1$ y $(c_1, c_2, ..., c_{n+1}) \in \bar{\Gamma}_1$. Debido a la continuidad de todas las y_i y a la compacidad de K Γ es compacto y podemos aplicar el lema de Caratheodory para concluir que $(c_1, c_2, ..., c_{n+1})$ es una combinación convexa de $r \leq n+2$ puntos de Γ. Por lo tanto existen $r \leq n+1$ puntos $t_1, t_2, ..., t_r \in K$ y $m_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., r$ tales $c_i = \sum_{j=1}^{r} y_i(t_k)m_k$ para $i = 1, 2, ..., n+1$ donde $\sum m_k = 1 = \|\sigma\|$. Luego se cumple $b)$ para $\sigma \geq 0$ y $\sigma(K) = 1$. Dividiento por una constante es cierto para toda $\sigma \geq 0$. Para el caso general $\sigma = \sigma' - \sigma''$ donde $\sigma' \geq 0$, $\sigma'' \geq 0$ y $\|\sigma\| = \|\sigma'\| + \|\sigma''\|$, en este caso consideramos $\Gamma \cup \Gamma^-$ donde $\Gamma^- = \{(-y_1(t), ..., -y_{n+1}(t))/t \in K\}$ y tomamos K tal que $\|\sigma\| = \sigma'(K) + \sigma''(K) = 1$, tenemos de forma análoga al caso anterior que las sumas de Riemann son

$$s_i = \sum_{j=1}^{p} y_i(t_j)(\sigma'(K_j)) + \sum_{j=1}^{p}(-y_i(t_j))\sigma''(K_j) \;\; para\ i = 1, 2, ..., n+1$$

siendo $\sum_{j=1}^{p} \sigma'(K_j) + \sum_{j=1}^{p} \sigma''(K_j) = \sum_{j=1}^{p} \sigma'(K_j) + \sigma''(K_j) = \sigma'(K) + \sigma''(K) = 1$, luego $(s_1, s_2, ..., s_n)$ pertenece a Γ_0, la cápsula convexa de $\Gamma \cup \Gamma^-$. También tenemos como en el caso anterior $(c_1, c_2, ..., c_{n+1}) \in \bar{\Gamma}_0$, luego por el lema de Caratheodory ... $(c_1, c_2, ..., c_{n+1})$ es una combinación convexa de $r \leq n+2$ puntos de $\Gamma \cup \Gamma^-$

$$c_i = \sum_{k=1}^{l} y_i(t_k)\mu_k + \sum_{k=l+1}^{r} (-y_i(t_k))\mu_k \;\; \text{para } i = 1, 2, ..., n+1$$

llamando $m_k = \mu_k$ para $k = 1, ..., l$ y $m_k = -\mu_k$ para $k = l+1, ..., r$, tenemos que se cumple $b)$ con $\sum |m_k| = \sum \mu_k = 1 = \sigma'(K) + \sigma''(K) = \|\sigma\|$, por lo tanto dividiendo por una constante $b)$ se cumplirá para cualquier σ.

Proposición 3.0.4 *Sea f una funcional continua de $C(K)$ concentrada en $t_1, ..., t_m$. Entonces un elemento $u \in C(K)$ cumple*

$$\|u\| = 1 \quad f(u) = \|f\|$$

si y solo si $u(t_k) = sigf(t_k)$ para todo k tal que $f(t_k) \neq 0$

Demostración:
Primero tengamos en cuenta que $\|f\| = \sum |f(t_k)|$, pues por la desigualdad triangular ya se cumple que $|\sum u(t_k)f(t_k)| \leq \sum |f(t_k)|$ y la igualdad se alcanza cuando $u(t_k) = sigf(t_k)$ cuando $f(t_k) \neq 0$. Ahora como $\|u\| = 1$ se tiene $|u(t_k)| \leq 1$, lo que nos dice si algún $u(t_k) \neq sigf(t_k)$ que $u(t_k).f(t_k) < |f(t_k)|$, luego tendriamos $\sum u(t_k).f(t_k) < \sum |f(t_k)|$, es decir $\|f\| < \|f\|$ contradicción.

■

Antes de enunciar la siguiente proposición veamos primero una notación. Sean L un subespacio de $C(K)$ y f funcional lineal continua definida en $C(K)$ concentrada en los puntos $t_1, ...t_k$ de K, denotaremos $\tilde{L} = \{\tilde{x} = (x(t_1), ..., x(t_k))/x \in L\}$

Proposición 3.0.5 *Sean f una funcional continua de $C(K)$ concentrada en $t_1, ..., t_m$ y L un subespacio de $C(K)$ tal que $\dim \tilde{L} < m$, entonces existe una funcional continua g de $C(K)$, concentrada en los mismos puntos t_i tal que*

$$g\,|_L = 0 \quad \textit{sin embargo} \quad g \neq 0, \quad \|g\| > 0$$

Demostración:
Debido a que el espacio $\dim \tilde{L} < m$ existe una funcional $\tilde{g} \in (R^m)^*$ tal que $\tilde{g}\,|_{\tilde{L}} = 0$ y $\tilde{g} \neq 0$. Esta funcional esta dada por m números $r_1, ..., r_n$ tal que $\tilde{g}(x) = \sum_{k=1}^m x_i r_i$. Pongamos $g(t_k) = r_k$ y definamos $g(x) = \sum_{k=1}^m x(t_k)g(t_k)$, tenemos que g es lineal y continua y $\|g\| = \sum |g(t_k)| = \sum |r_k| = \|\tilde{g}\| > 0$, además como $g(x) = \tilde{g}(\tilde{x})$ tenemos que $g\,|_L = 0$.

Teorema 3.0.4 *Sean f una funcional continua de $E = C(K)$ concentrada en $n+2$ puntos $t_1, t_2, ..., t_{n+2}$, L_0 un subespacio vectorial de E y sea además $\tilde{L_0} = \{\tilde{x} = (x(t_1), ..., x(t_{n+2})/x \in L_0\}$ subespacio de $\mathbb{R}^{n+2}$.
Si $\dim \tilde{L_0} = l \leq n+1$(en particular si L_0 tiene dimensión $l \leq n+1$) y se verifica $\|f\| = \|f\|_{L_0}$ entonces existe f_0 de E^* tal que $f_0\,|_{L_0} = f\,|_{L_0}$ y f_0 está concentrada en $n+1$ puntos t_i además $\|f_0\| = \|f\|$*

Demostración:
Al ser f concentrada en $n+2$ puntos, existen $n+2$ constantes $f(t_k)$ tal que $f(x) = \sum x(t_k)f(t_k)$, además se cumple que $\|f\| = \sum |f(t_k)|$.Si algunos de los $f(t_k)$ es nulo basta poner $f_0 = f$. Supongamos ahora que $f(t_k) \neq 0$ para todo k.

Afirmación 1: Existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$.En efecto:
Observemos que f se puede escribir como

$$f(x) = \langle (x(t_1), ..., x(t_{n+2}), (f(t_1), ..., f(t_{n+2})) \rangle \quad \text{para todo } x \in E$$

Si llamamos $w = (f(t_1), ..., f(t_{n+2}))$ entonces $f(x) = \langle \tilde{x}, w \rangle$. Debido a que $\|f\| = \sup_{\|x\|=1 \ x \in L_0} f(x) = \sup_{\|x\|=1 \ \tilde{x} \in \tilde{L}_0} \langle \tilde{x}, w \rangle$ y que el conjunto $A = \left\{ \tilde{x} \in \tilde{L}_0 / \|x\| = 1 \right\}$ es compacto (cerrado y acotado en un espacio de dimensión finita) entonces $f(x) = \langle \tilde{x}, w \rangle$ alcanza su máximo en $u \in L_0$,luego existe $u \in L_0$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$. La función u de la afirmación 1 cumple $u(t_k) = sigf(t_k)$.
Por la proposición 3.0.4 y debido a que $\dim \tilde{L}_0 = l \leq n+1$ existe $g \in E^*$ tal que $\|g\| > 0$, $g = 0$ en L_0 y $g(x) = \sum_{k=1}^{n+2} x(t_k) g(t_k)$.
Pongamos para cada $\lambda \geq 0$ $f_\lambda = f + \lambda g$, luego $f_\lambda = f$ en L_0 y

$$f_\lambda \ \text{ esta concentrada en } \ t_1, t_2, ..., t_{n+2} \tag{3.2}$$

Como $f(t_k) \neq 0$ para todo k, para λ suficientemente pequeño se tiene $sigf_\lambda(t_k) = sigf(t_k) = u(t_k)$ para todo k.
Afirmación 2: Para todo λ, $sigf_\lambda(t_k) = sigf(t_k)$ para todo k implica que $\|f_\lambda\| = \|f\|$. En efecto:
$\|f_\lambda\| = \sum_{k=1}^{n+2} |f_\lambda(t_k)| = \sum_{k=1}^{n+2} f_\lambda(t_k) sigf(t_k) = \sum_{k=1}^{n+2} f_\lambda(t_k) u(t_k) = \sum_{k=1}^{n+2} f(t_k) u(t_k) + \lambda \sum_{k=1}^{n+2} g(t_k) u(t_k) = \sum_{k=1}^{n+2} |f(t_k)| + \lambda g(u) = \sum_{k=1}^{n+2} |f(t_k)| = \|f\|$.
En particular $\|f_\lambda\| = \|f\|$ para todo λ suficientemente pequeño.
Para λ grande $\|f_\lambda\| = \|f + \lambda g\| \geq \lambda \|g\| - \|f\| > \|f\|$.
En resumen tenemos

$$\|f_\lambda\| = \|f\| \quad \text{si } \lambda \leq r_1$$

$$\|f_\lambda\| > \|f\| \quad \text{si } \lambda > r_2$$

Afirmación 3: Podemos suponer que $r_1 = r_2 = \lambda_0$. En efecto:
El conjunto $B = \{r / \|f_\lambda\| = \|f\| \,\text{si}\, \lambda \leq r\}$ esta incluido en $[0, r_2]$ luego es acotado.Veamos ahora que es cerrado: Sea $r \in \bar{B}$, luego existe $(r_n) \subseteq B$ tal que $r_n \to r$ si fuera $r = 0$ entonces $r \in B$, supongamos que $r \neq 0$, si tomamos $\lambda < k$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < k_{n_0}$ entonces $\|f_\lambda\| = \|f\|$, luego $\|f_\lambda\| = \|f\|$ para todo $\lambda < r$ y tomando limites $\|f_\lambda\| = \|f\|$ para todo $\lambda \leq r$, entonces $r \in B$.Tenemos pues que el conjunto B es compacto, con lo que existe $\lambda_0 = maxB$.Veamos ahora lo siguiente

$$\|f_\lambda\| = \|f\| \quad \text{si } \lambda \leq \lambda_0$$

$$\|f_\lambda\| > \|f\| \quad \text{si } \lambda > \lambda_0$$

Por la definición de λ_0 la primera parte ya se cumple.Si $\lambda > \lambda_0$ entonces $\|f_{\lambda_0}\| \neq \|f\|$ si $\|f_{\lambda_0}\| < \|f\| < \|f_{r_2+1}\|$ por el teorema del valor medio existe $\lambda < \lambda_1 < r_2 + 1$ tal que $\|f_{\lambda_1}\| = \|f\|$, lo cual contradice la definición de λ_0 por tanto $\|f_\lambda\| > \|f\|$.

Afirmación 4: $f_{\lambda_0}(t_k)$ debe cambiar de signo para algún k. En efecto:
En caso contrario si $\lambda > \lambda_0$ suficientemente proximo de λ_0 se tendra $sigf_\lambda(t_k) = sigf(t_k)$ para todo k y por la afirmación 2 $\|f_\lambda\| = \|f\|$ lo que contradice la construcción de λ_0.
Según la afirmación 4 el conjunto $\Delta = \{1 \leq i \leq n+2/sigf_{\lambda_0}(t_i) \neq sigf(t_i)\}$
es no vacio.
Observemos que $\|f\| = \sum |f(t_k)| + \lambda_0 g(u) = \sum f(t_k)sigf(t_k) + \lambda_0 \sum g(t_k)sigf(t_k) = \sum f_{\lambda_0}(t_k)sigf_{\lambda_0}(t_k)$ de esto último y debido a que $\|f_{\lambda_0}\| = \|f\|$ se tiene

$$\|f\| = \sum_{i \notin \Delta} |f_{\lambda_0}(t_i)| - \sum_{\in \Delta} |f_{\lambda_0}(t_i)|$$

$$\|f\| = \sum_{i \notin \Delta} |f_{\lambda_0}(t_i)| + \sum_{i \in \Delta} |f_{\lambda_0}(t_i)|$$

luego $\sum_{i\in\Delta} |f_{\lambda_0}(t_i)| = 0$ con lo cual $|f_{\lambda_0}(t_i)| = 0$ para todo $i \in \Delta$, por lo tanto por (3.2) podemos tomar $f_0 = f_{\lambda_0}$ y la demostración concluye.

■

Escribiremos $f \sim \mu$ para indicar la relación dada por el teorema 3.0.2.

Sean $y_1, y_2, ..., y_n$ n funciones en $C(K)$ linealmente independientes y denotemos $L = \langle y_1, y_2, ..., y_n\rangle$. Teniendo en cuenta las definiciones anteriores $d(x_0, L) = d > 0$ y $L_1^\perp = \{f \in E^*/ \int_K y_i(t)d\mu = f(y_i) = 0, \int_K x_0(t)d\mu = f(x_0) = 1\}$.
Según la primera sección:
$f_0 \in \mathcal{F}$ sí y solo si $f_0 \in L_1^\perp$, $\|f_0\| = inf\{\|f\| / f \in L_1^\perp\}$.
Luego si $f \in \mathcal{F}$ y $g \in L_1^\perp$, $\|g\| = \|f\|$ implica que $g \in \mathcal{F}$...(Δ)
Ahora veamos el siguente teorema

Teorema 3.0.5 *Existe $f \in \mathcal{F}$ concentrada en $r \leq n+1$ puntos $t_1, t_2, ..., t_r$ de K que cumple*
a) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1, x\in L_0} f(x) = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k=1}^r x(t_k)f(t_k) = \sum_{k=1}^r |f(t_k)|$
b) $f(y_i) = \sum_{k=1}^r y_i(t_k)f(t_k) = 0$
c) $f(x_0) = \sum_{k=1}^r x_0(t_k)f(t_k) = 1$

Demostración:
Debido a que $\mathcal{F}$ es no vacio, existe $f_1 \in \mathcal{F}$. Usando el teorema de Caratheodory-Riesz para las constantes $c_i = f_1(y_i)$, $1 \leq i \leq n$ y $c_{n+1} = f_1(x_0)$,
tenemos que existe $f \in L_1^\perp$ concentrada en $r \leq n+2$ puntos $t_1, t_2, ..., t_r$ tal que $f(y_i) = f_1(y_i)$, $f(x_0) = f_1(x_0)$ y además $\|f\| = \|f_1\|$.Por (Δ) esta última parte implica que $f \in \mathcal{F}$, luego $\|f\| = \|f\|_{L_0}$.
Caso 1:$r = n+2$
La dimensión de L_0 es $n+1$ y además $\|f\| = \|f\|_{L_0}$, luego por el teorema 3.0.4 existe

$f_0 \in E^*$ tal que $f_0 |_{L_0} = f |_{L_0}$ y f_0 concentrada en $n+1$ puntos.
Caso 2:$r \leq n+1$.
En este caso no hay nada que probar.

■

Interpretación del teorema:

Sea $\tilde{K} = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$ con $r \leq n+1$.
Consideremos la función:

$$\begin{array}{cccc} \sim: & C(K) & \longrightarrow & C(\tilde{K}) \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} = x|_K \end{array}$$

Al espacio L se le asignara el correspondiente subespacio $\tilde{L}$ de $C(\tilde{K})$

Como para todo $x \in C(\tilde{K})$, $x = (x(t_1), x(t_2), ..., x(t_r))$ las fórmulas $a), b)$ y $c)$ del teorema 3.0.5 muestran que la funcional $f \in \mathcal{F}$ define una funcional $\tilde{f} \in C(\tilde{K})$ tal que $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$,$\tilde{f} = 0$ en L y $\tilde{f}(\tilde{x_0}) = 1$. En efecto, definamos $\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{r} z(t_k)f(t_k)$ para todo $z \in C(\tilde{K})$.Claramente $\tilde{f}$ es lineal.
Sean $z \in C(\tilde{K})$ y $(z_n) \subseteq C(\tilde{K})$ tales que $z_n \to z$, tenemos $\tilde{f}(z_n) = \sum_{k=1}^{r} z_n(t_k)f(t_k) \to \sum_{k=1}^{r} z(t_k)f(t_k) = \tilde{f}(z)$, lo cual prueba la continuidad de $\tilde{f}$.Ahora por la parte $a)$ del teorema 3.0.5 $\left\|\tilde{f}\right\| = \sum_{k=1}^{r} |f(t_k)| = \|f\|$, además por la parte b) del teorema 3.0.5 $\tilde{f} = 0$ en L y por la parte c) $\tilde{f}(\tilde{x_0}) = 1$

Veamos ahora $\left\|\tilde{f}\right\| = \left\|\tilde{f}\right\|_{L_0}$. En efecto: En primer lugar $\|f\|_{L_0} = \|f\| = \left\|\tilde{f}\right\| \geq \left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{L_0}}$, luego $\|f\|_{L_0} \geq \left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{L_0}}$, por otro lado, $\left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{L_0}} = \sup_{\|z\| \leq 1 \ z \in \tilde{L_0}} \left|\tilde{f}(z)\right| \geq \sup_{x_0 \in L_0 \ \|\tilde{x}\| \leq 1} \left|\tilde{f}(\tilde{x})\right| \geq \sup_{\|x\|=1 \ x \in L_0} |f(x)| \geq \|f\|_{L_0}$ luego $\left\|\tilde{f}\right\|_{\tilde{L_0}} \geq \|f\|_{L_0}$.

Luego $d(\tilde{x_0}, \tilde{L}) = \frac{1}{\|\tilde{f}\|} = \frac{1}{\|f\|} = d(x_0, L)$

Ahora $\left|\tilde{f}(\tilde{z_0})\right| = |f(z_0)| = \|f\| \|z_0\| = \left\|\tilde{f}\right\| \|z_0\| \geq \left\|\tilde{f}\right\| \|\tilde{z_0}\|$
de esto último $\tilde{z_0}$ es extremal de $\tilde{f}$ en $\mathcal{F}(\tilde{L_0}, \tilde{x_0})$, por tanto $\tilde{y_0}$ es e.m.ap. de $\tilde{x_0}$
Tenemos $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, L)$ y $\|\tilde{x_0} - \tilde{y_0}\| = d(\tilde{x_0}, \tilde{L})$ y como $d(x_0, L) = d(\tilde{x_0}, \tilde{L})$ entonces
$\|x_0 - y_0\| = \|\tilde{x_0} - \tilde{y_0}\| = sup\{|(x_0 - y_0)(t)| / t \in \tilde{K}\}$
De todo esto concluimos el siguiente corolario:

Corolario 3.0.1 *Existen $r \leq n+1$ puntos t_i tales que si $\tilde{K} = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$ se tiene (si y_0 es el e.m.ap de x_0):*

$$\inf_{y \in L} \|x_0 - y\|_{C(K)} = \inf_{y \in \tilde{L}} \|\tilde{x_0} - y\|_{C(\tilde{K})} = \sup_{k \leq r} |x_0(t_k) - y_0(t_k)|$$

Este corolario expresa que el problema de e.m.ap en $C(K)$ se reduce a un problema análogo en un $C(\tilde{K})$ donde $\tilde{K}$ tiene $r \leq n+1$ puntos.

Para cada sistema finito $\tau = \{t_1, t_2, t_3, ..., t_r\} \subseteq K$ pongamos

$$a_{ik} = a_{ik}(\tau) = y_i(t_k);\ b_k(\tau) = x_0(t_k) \text{ para } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq r$$

Como los y_i y el x_0 son dados, los a_{ik} y b_k son conocidos; dado τ, $b)$ y $c)$ del teorema 3.0.5 expresan que existe $f \in \mathcal{F}$ definida por
$f(x) = \sum_{k=1}^{r} x(t_k) f(t_k)$ para todo $x \in C(K)$, siendo $f(t_k) = \omega_k$ soluciones del sistema lineal:

$$\begin{aligned} &a_{11}(\tau)\omega_1 + ... + a_{1r}(\tau)\omega_r = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}(\tau)\omega_1 + ... + a_{nr}(\tau)\omega_r = 0 \\ &\ b_1(\tau)\omega_1 + ... + b_r(\tau)\omega_r = 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego tenemos que la función f esta concentrada en los r puntos del sistema finito τ.
Indicaremos con $\rho(\mathcal{F})$ al mínimo r tal que existe $f \in \mathcal{F}$ concentrada en r puntos.
Por el teorema 3.0.5

$$\rho(\mathcal{F}) \leq n+1 \tag{3.4}$$

Para el sistema $\tau = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$ indicaremos con:

$$M(\tau) \text{ a la matriz del sistema (3.3)}$$

$$M_1(\tau) = (a_{ik}(\tau))_{i \leq n, k \leq r} \tag{3.5}$$

Si $r = n+1$, es decir si $M(\tau)$ es cuadrada, indicaremos con

$$\Delta = \Delta(\tau) = det M(\tau) \tag{3.6}$$

$$\Delta_k \text{ es el menor algebraico de } b_k \text{ en } M(\tau) \tag{3.7}$$

Proposición 3.0.6 *Si $f \in \mathcal{F}$ está concentrada en $\tau = \{t_1, ..., t_r\}$ con $r = \rho(\mathcal{F})$, entonces $M(\tau)$ tiene rango r y $M_1(\tau)$ tiene rango $r-1$*

Demostración:
Si M tuviera rango menor que r, los $n+1$ vectores $\tilde{y_i} = (a_{i1}, ..., a_{ir})$, $\tilde{x_0} = (b_1, ..., b_r)$ estarían en un subespacio $\tilde{L_0}$ de $\mathbb{R}^r$ de dimensión $r_1 < r$; como f alcanza la norma en L_0 y dim $\tilde{L_0} = r_1 < r$ por el teorema 3.0.4 existiría $f_0 \in \mathcal{F}$ concentrada en $r-1$ puntos lo cual es absurdo. Entonces $rango(M) \geq r$. Por otra parte, M_1 no puede tener rango r pues en este caso $\omega_i = 0$ sería la única solución posible de (3.3) pero esta solución no satisface la última ecuación lo que contradice al hecho que $f(t_k)$ es una solución.

■

Proposición 3.0.7 *Si* $\tau = \{t_1, ..., t_r\}$ *con* $r = n + 1$ *y si* $\Delta = \det M(\tau) \neq 0$, *entonces*

a) Existe una única $f \in L_1^{\perp}$ *concentrada en* τ, *dada por*

$$f(t_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad \|f\| = \sum_{k=1}^{n+1} \left| \frac{\Delta_k}{\Delta} \right| \tag{3.8}$$

b) Si $x \in L_0 = L + < x_0 >$ *y* $x(t_k) = 0$ *en* τ, *entonces* $x = 0$

c) Si $y_0 \in L$ *verifica las condiciones siguientes*

$$|y_0(t_k) - x_0(t_k)| = \|y_0 - x_0\| \tag{3.9}$$

$$sig(x_0(t_k) - y_0(t_k)) = sig\,(\Delta_k \Delta) = sig\left(\frac{\Delta_k}{\Delta}\right) \text{ para todo } t_k \in \tau \tag{3.10}$$

entonces y_0 *es e.m.ap. de* x_0

Demostración:
a)Siendo $r = n + 1$ y $\Delta \neq 0$, el sistema (3.3) tiene una única solución $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r$. Definiendo $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x(t_k)\omega_k$, esta f es concentrada en τ y (d) dice que $f \in L_1^{\perp}$.Como los términos independientes son $0, 0, ..., 0, 1$; resulta la fórmula (3.8)

b) A todo $x \in L_0$ le corresponde el vector $\tilde{x} = (x(t_1), ..., x(t_{n+1})) \in \mathbb{R}^{n+1}$
$\tilde{y_i}, \tilde{x_0}$ son linealmente independientes pues $\det M \neq 0$.
Ahora $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k + \lambda x_0$, entonces $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{y_k} + \lambda \tilde{x_0}$ Si $x(t_k) = 0$ en τ entonces $\tilde{x} = 0$, luego $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{y_k} + \lambda \tilde{x_0} = 0$, de aquí $\lambda_k = 0$ y $\lambda = 0$; por lo tanto $x = 0$

c) De (3.9) sigue que $y_0(t_k) - x_0(t_k) \neq 0$.
Si $f \in L_1^{\perp}$ es la funcional de a), por (3.8) y (3.10) será

$$x_0(t_k) - y_0(t_k) = \|x_0 - y_0\|\, sig(x_0(t_k) - y_0(t_k)) = \|x_0 - y_0\|\, sig\left(\frac{\Delta_k}{\Delta}\right)$$

$= \|x_0 - y_0\|\, sig f(t_k)$, luego

$$f(x_0 - y_0) = \sum_{k=1}^{r} (x_0(t_k) - y_0(t_k)) f(t_k) = \sum_{k=1}^{r} \|x_0 - y_0\|\, |f(t_k)| = \|x_0 - y_0\|\, \|f\|$$

, luego $x_0 - y_0$ es extremal de $f \in L_1^{\perp}(x_0)$, por el teorema 1.0.1 parte c) y_0 es e.m.ap. de x_0

Proposición 3.0.8 *Si $\rho(\mathcal{F}) = n+1$, existe una $f \in \mathcal{F}$ concentrada en el sistema $\tau = \{t_1, t_2, ..., t_{n+1}\}$ y el e.m.ap. es único. Además, se tiene:*

$$\frac{1}{d} = \sum_{k=1}^{n+1} \left| \frac{\Delta_k(\tau)}{\Delta(\tau)} \right| \tag{3.11}$$

y $y_0 \in L$ es el e.m.ap. de x_0 si y solo si se cumplen (3.9) y (3.10) de la proposición 3.0.7, es decir, la función $\|x_0 - y_0\|$ alcanza su máximo en todos los $t \in \tau$ y toma en estos puntos valores de signo igual al de $\Delta_k \Delta$

Demostración:

Por el teorema 3.0.4 existe una $f \in \mathcal{F}$ concentrada en un sistema de $r \leq n+1$ puntos y por ser $\rho(\mathcal{F}) = n+1$ debe ser $r = n+1$ y $\Delta \neq 0$.Por la proposición 3.0.7 tal f es única y los $f(t_k)$ son dados por (3.8) y como $\frac{1}{d} = \|f\|$, entonces $\frac{1}{d} = \sum_{k=1}^{n+1} \left| \frac{\Delta_k(\tau)}{\Delta(\tau)} \right|$
Veamos primero la equivalencia.
Si y_0 es el e.m.ap. de x_0, $z_0 = x_0 - y_0$ es extremal de f, luego $\sum_{k=1}^{n+1} z_0(t_k) f(t_k) = f(z_0) = \|f\| \, \|z_0\| \geq (\sup_k |z_0(t_k)|)(\sum_{k=1}^{n+1} |f(t_k)|)$
Afirmación:$z_0(t_k) = \sup_k |z_0(t_k)|$ y $sig z_0(t_k) = sig f(t_k)$ para todo $1 \geq k \geq n+1$.En efecto:
Se sabe $z_0(t_k) \leq \sup_k |z_0(t_k)|$. Si $z_0(t_k) < \sup_k |z_0(t_k)|$ entonces
$(\sup_k |z_0(t_k)|) \, |f(t_k)| > |z_0(t_k)| \, |f(t_k)| \geq z_0(t_k) f(t_k)$ luego
$(\sup_k |z_0(t_k)|) \sum_{k=1}^{n+1} |f(t_k)| > \sum_{k=1}^{n+1} z_0(t_k) f(t_k)$ lo cual es absurdo, por lo tanto $z_0(t_k) = \sup_k |z_0(t_k)|$.
Ahora veamos la otra parte.
$\sum_{k=1}^{n+1} z_0(t_k) f(t_k) \geq (\sup_k |z_0(t_k)|)(\sum_{k=1}^{n+1} |f(t_k)|) \geq -z_0(t_k) f(t_k) + \sum_{p \neq k} z_0(t_p) f(t_p)$
simplificando $z_0(t_k) f(t_k) \geq -z_0(t_k) f(t_k)$ entonces $2 z_0(t_k) f(t_k) \geq 0$ luego $sig z_0(t_k) = sig f(t_k)$ lo cual termina de probar la afirmación.
Luego juntando estos resultados con el corolario del teorema 3.0.4 $\|x_0 - y_0\| = |x_0(t_k) - y_0(t_k)|$ para todo k y $sig(x_0(t_k) - y_0(t_k)) = sig f(t_k) = sig \frac{\Delta_k}{\Delta}$, es decir, se verifican (3.9) y (3.10) de la proposición 3.0.7 .
Recíprocamente si se verifican (3.9) y (3.10) de la proposición 3.0.7 como $r = n+1$ y $\Delta \neq 0$ entonces y_0 es el e.m.ap. de x_0.
Ahora veamos la unicidad:
Debido a que $z_0(t_k) = \|x_0 - y_0\|$ para todo k y que por el inciso b) de la proposición 3.0.7 un elemento $z_0 \in L_0$ esta determinado por sus valores $z_0(t_k)$ en τ, entonces el e.m.ap. es único y esta caracterizado por las propiedades (3.9) y (3.10) de la proposición 3.0.7

■

Asi pues si $\rho(\mathcal{F}) = n + 1$ y se conoce un $\tau = \{t_1, t_2, ..., t_{n+1}\}$ correspondiente a una $f \in \mathcal{F}$ entonces el problema de la mejor aproximación queda resuelto por las fórmulas (3.11),(3.9)y (3.10)

Capítulo 4

Sistemas T

Definición 4.0.8 *Un sistema* $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *es un sistema* T *si en ese sistema el e.m.ap es único cualquiera sea* x_0

Definición 4.0.9 *Diremos que el sistema* $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq C(K)$ *verifica la condición de Haar si para todo sistema* $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq K$

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & ... & y_1(t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n(t_1) & ... & y_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.1}$$

Si tenemos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no todos nulos entonces la expresión $p(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) + ... + \lambda_n y_n(t)$ se anula a lo sumo en $n-1$ puntos. En efecto: Si se anulara en n puntos se formaría un sistema $n \times n$ con solución $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ que por ser no todos nulos (4.1) no se cumpliría.Como los polinomios de grado $n-1$ cumplen esto, el sistema $\{1, 2, ..., t^{n-1}\}$ verifica la condición de Haar.

Teorema 4.0.6 (Teorema de Haar) *Para todo sistema* $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq C(K)$ *son equivalentes:*

a) $\{y_i\}$ *verifica la condición de Haar.*

b) $\{y_i\}$ *es un sistema* T

c) Para todo $x_0 \notin L$ *es* $\rho(\mathcal{F}) = n+1$ *donde* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(L, x_0)$ *y* $L =< y_1, y_2, ..., y_n >$

Demostración:

$a) \to c)$ Sea $\tau = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$ un sistema en que esta concentrada una $f \in \mathcal{F}$ y

veamos que no puede ser $r < n+1$.
Si fuera $r < n+1$, como por la proposición 3.0.6 la matriz

$$M_1(\tau) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nr} \end{bmatrix}$$

tiene rango $r-1$ entonces sus r vectores columna son linealmente dependientes; luego completando τ a un sistema $\tau' = \{y_1, y_2, ..., y_r, y_{r+1}, ..., y_n\}$ la matriz:

$$M_1(\tau') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & a_{1r+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nr} & a_{nr+1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

tiene r vectores columna linealmente dependientes, entonces $rangM_1(\tau') < r < n+1$, luego $rangM_1(\tau') < n$ por tanto $\det M_1(\tau') = 0$, lo cual nos dice que $\{y_i\}$ no verifica la condición de Haar.
$c) \to b)$Proposición 3.0.8
$b) \to a)$ Supongamos lo contrario i.e. existe $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq K$ tal que

$$\begin{vmatrix} y_1(t_1) & ... & y_1(t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n(t_1) & ... & y_n(t_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

luego existen $c_1, c_2, ..., c_n$ no todos nulos tal que:

$$\begin{array}{ccccccc} y_1(t_1)c_1 & + & y_1(t_2)c_2 & + & ... & + & y_1(t_n)c_n = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n(t_1)c_1 & + & y_n(t_2)c_2 & + & ... & + & y_n(t_n)c_n = 0 \end{array}$$

por tanto para todo $y \in L =< y_1, y_2, ..., y_n >$,

$$c_1 y(t) + c_2 y(t) + ... + c_n y(t) = 0 \tag{4.3}$$

.Como se cumple (4.2) existen $d_1, d_2, ..., d_n$ no todos nulos tal que $d_1(y_1(t_1), ..., y_1(t_n)) + d_2(y_2(t_1), ..., y_2(t_n)) + ... + d_n(y_n(t_1), ..., y_n(t_n))) = 0$
Definiendo $y' = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i$ entonces $y'(t_i) = 0$ para todo i.
Como K es compacto podemos elegir $\lambda \neq 0$ tal que $\sup_{t \in K} |\lambda y'(t)| \leq 1$. Se afirma que existe $x \in C(K)$ tal que $\|x\| \leq 1$ y $x(t_k) = sig\ c_k$ si $c_k \neq 0$(siendo sig la función signo). En efecto: Definimos

$$\begin{array}{llll} \hat{x}: & \{t_1, t_2, ..., t_n\} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & t_k & \longmapsto & \hat{x}(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{Si } c_k = 0 \\ sig\ c_k & \text{Si } c_k \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Por el teorema de extensión de Tietze x se puede extender a una función $x : K \to [-1, 1]$ luego se cumple la afirmación.
Definamos $x_0(t) = x(t)\{1 - |\lambda y'(t)|\}$.
Evidentemente $\|x_0\| \leq 1$ además $x_0(t_k) = x(t_k)\{1 - 0\} = sig\ c_k$ si $c_k \neq 0$ luego $|x_0(t_k)| = |x(t_k)| = |sig\ c_k| = 1$ si $c_k \neq 0$ por tanto $\|x_0\| = 1$
Veamos que para esta x_0 existen infinitos elementos y_0 de mejor aproximación lo que dará una contradicción con la hipótesis.
Para $y_0 \in L$ veamos que $\sup_t |y_0(t) - x_0(t)| \geq 1$, pues de lo contrario
$\sup_t |y_0(t) - x_0(t)| < 1$
Sea $c_k \neq 0$ $|y_0(t_k) - x_0(t_k)| < 1$ entonces $|y_0(t_k) - sig\ c_k| < 1$
Si $y_0(t_k) = 0$ entonces $|sig\ c_k| < 1$ contradicción.
Luego $y_0(t_k) \neq 0$. Si $sig\ y_0(t_k) \neq sig\ c_k$ luego $|y_0(t_k) - sig\ c_k| = |y_0(t_k)| + 1$ contradicción .Por tanto $sig\ y_0(t_k) = sig\ c_k$ lo cual da $c_1 y_0(t_1) + ... + c_n y_0(t_k) > 0$ contradicción con (4.3).
Por lo tanto

$$\sup_t |y_0(t) - x_0(t)| \geq 1 \quad \text{para todo} \quad y_0 \in L \tag{4.4}$$

Ahora si $|\epsilon| \leq 1$ tendremos

$$|\epsilon\lambda y'(t) - x_0(t)| \leq |\epsilon\lambda y'(t)| + |x_0(t)|$$

Como $\|x\| \leq 1$ y $|\epsilon\lambda y'(t)| + |x_0(t)| = |\epsilon\lambda y'(t)| + |x(t)| (1 - |\lambda y'(t)|)$
entonces $|\epsilon\lambda y'(t)| + |x_0(t)| \leq |\epsilon| |\lambda y'(t)| + (1 - |\lambda y'(t)|) = (|\epsilon| - 1) |\lambda y'(t)| + 1 = 1 - (1 - |\epsilon|) |\lambda'(t)| \leq 1$
Por tanto

$$\sup_t |\epsilon\lambda y'(t) - x_0(t)| \leq 1 \tag{4.5}$$

De (4.4) y (4.5) para cada $|\epsilon| \leq 1$ y cada $y_0 \in L$ $\|\epsilon\lambda y' - x_0\| = 1$ y $1 \leq \|y_0 - x_0\|$ para todo $y_0 \in L$, es decir $\|\epsilon\lambda y' - x_0\| = d(x_0, L)$ para todo $|\epsilon| \leq 1$, lo cual significa que $\epsilon\lambda y'$ es un e.m.ap. de x_0 para todo $|\epsilon| \leq 1$

■

Teorema 4.0.7 (Teorema de Chevichev-Remes) *Sean $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq C(K)$ un sistema T, $L =< y_1, y_2, ..., y_n >$ y $x_0 \notin L$.Para que y_0 sea el único e.m.ap. de x_0 es necesario y suficiente que existan $n + 1$ puntos*

$$\tau = \{t_1, t_2, ..., t_{n+1}\} \subseteq K$$

tales que se verifican (3.9) y (3.10) de la proposición 3.0.7

Demostración: Supongamos que y_0 es el e.m.ap. de x_0 y sea $z_0 = x_0 - y_0$.
Por ser $\{y_i\}$ un sistema T y por el teorema de Haar $\rho(\mathcal{F}) = n+1$ y por la proposición 3.0.8 se cumplen (3.9)y (3.10).

Recíprocamente supongamos que se verifican (3.9) y (3.10) para un sistema τ de $n+1$ puntos. Como $\|x_0 - y_0\| > 0$, de (3.9) se sigue que $x_0(t_k) - y_0(t_k) \neq 0$ y de (3.10) $\Delta \neq 0$ luego por c) de la proposición 3.0.7 y_0 es e.m.ap. de x_0.

$\blacksquare$

Teorema 4.0.8 (Teorema de Chevichev-Bernstein) *Sean $K = [a, b]$,$\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ un sistema T de $C(K)$ y $x_0 \in L$. Entonces y_0 es elemento de mejor de aproximación de x_0 si y solo si existen $t_1 < t_2 < ... < t_{n+1}$ tales que $|y_0(t_k) - x_0(t_k)| = \|x_0 - y_0\|$ para todo $1 \leq k \leq n+1$ y $y_0 - x_0$ toma signos alternados en los puntos t_k*

Demostración:

Afirmación:
Sea $\tau = \{t_1 < t_2 < ... < t_{n+1}\}$ un sistema de $n+1$ puntos.Entonces existe $p \in \{-1, 1\}$ tal que $sig\frac{\Delta_k}{\Delta} = p(-1)^{n+k}$.En efecto:
Sea $2 \leq k \leq n+1$ y consideremos la función $y \in L$ definida por

$$y(t) = \begin{vmatrix} y_1(t_1) & ... & y_1(t_{k-2}) & y_1(t) & y_1(t_{k+1}) & ... & y_1(t_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n(t_1) & ... & y_n(t_{k-2}) & y_n(t) & y_n(t_{k+1}) & ... & y_n(t_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Observamos que $y(t)$ se anula en $t_1, ..., t_{k-2}, t_{k+1}, ..., t_{n+1}$, es decir, en $n-1$ en puntos. Como se cumple la condición de Haar no se puede anular en mas puntos, luego $y(t)$ no se anula en el intervalo (t_{k-2}, t_{k+1}), por tanto

$$sig\ y(t_{k-1}) = sig\ y(t_k) \tag{4.6}$$

Sea A_k la submatriz de $M(\tau)$ que resulta de eliminar la fila $n+1$ y la columna k, luego (4.6) dice que

$$sig \det(A_k) = sig \det(A_{k-1}) \text{ para todo } 2 \leq k \leq n+1 \tag{4.7}$$

Como $\Delta_k = (-1)^{n+k} A_k$, (4.7) nos dice que el signo de Δ_k solo depende de $(-1)^{n+k}$ luego existe $p \in \{-1, 1\}$ tal que $sig\frac{\Delta_k}{\Delta} = p(-1)^{n+k}$ para todo $1 \leq k \leq n+1$ lo cual prueba la afirmación.
Sea y_0 el e.m.ap de x_0 entonces se verifican (3.9) y (3.10).De (3.9) y de la afirmación se deduce que los signos de $y_0 - x_0$ son alternados en los puntos t_k.
Reciprocamente supongamos que existen $t_1 < t_2 < ... < t_{n+1}$ tales que $|y_0(t_k) - x_0(t_k)| = \|x_0 - y_0\|$ para todo $1 \leq k \leq n+1$ y los signos de $y_0 - x_0$ son alternados en los puntos t_k.
Sabemos que existe f concentrada en $\{t_1, t_2, ..., t_{n+1}\}$. Tenemos

$$f(y_0 - x_0) = \sum_{k=1}^{n+1} (y_0(t_k) - x_0(t_k)) f(t_k) \tag{4.8}$$

Por la afirmación los signos de $f(t_k)$ se alternan y de la hipótesis los signos de $y_0(t_k) - x_0(t_k)$ se alternan, luego los signos de los términos de la sumatoria (4.8) son iguales, por tanto existe $q \in \{-1, 1\}$ tal que

$$f(y_0 - x_0) = q \sum_{k=1}^{n+1} |y_0(t_k) - x_0(t_k)| \, |f(t_k)|$$

luego

$$f(y_0 - x_0) = q \, \|y_0 - x_0\| \sum_{k=1}^{n+1} |f(t_k)| = q \, \|y_0 - x_0\| \, \|f\|$$

y tomando normas $|f(y_0 - x_0)| = \|y_0 - x_0\| \, \|f\|$, entonces $y_0 - x_0$ es un elemento extremal de f con lo cual se concluye que y_0 es un e.m.ap. de x_0.

Bibliografía

[1] Elon Lages Lima , *Espaços métricos*, segunda edición, Proyecto Euclides IMPA, 1983.

[2] Erwin Kreyzig, *Introductory funcional analysys with applications*, University of Windsor,John Wiley & Sons.Inc.,1978

[3] Misha Cotlar y Roberto Cignoli, *Nociones de espacios normados*, Editorial universitaria de Buenos Aires, 1967